1 .Múltiplos y divisores

1.1 Descomposición factorial

Todos los números naturales (1, 2, 3, 4, 5…) se pueden escribir como producto de números primos.

$3 = 3$ $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$ $6 = 2 \cdot 3$ $24 = 2^3 \cdot 3$ $35 = 5 \cdot 7$

Sabiendo "de qué está hecho un número" podemos calcular fácilmente sus múltiplos y sus divisores.

1.1.1 Ejercicio resuelto.

Realiza la descomposición factorial de 1200 y 345.

1200: es par → se pude dividir entre 2, la suma de sus cifras es 1+2+0+0 = 3 → es divisible entre 3, termina en 0 → es divisible entre 5.

1200	2
600	2
300	2
150	2
75	3
15	3
5	5
1	**Así que $1200 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$**

345: la suma de sus cifras es 3 + 4 + 5 = 12 → es divisible entre 3, termina en 5→ es divisible entre 5.

345	3
115	5
23	23
1	**Así que $345 = 3 \cdot 5 \cdot 23$**

1.1.2 Practícalo tú.

Realiza la descomposición factorial de 12, 34, 1800 y 36.

1.2 Divisores de un número

Dado un número, *por ejemplo 24*, si al dividirlo por otro, *por ejemplo 4*, da exacto, decimos que es su divisor. *4 es divisor de 24.*

Y si no da exacto, *por ejemplo 5*, decimos que no es divisor. *5 no es divisor de 24.*

Una manera de buscar todos los divisores de un número es irlo dividiendo por 1, 2, 3, 4, … hasta llegar a la mitad del número. Si coleccionamos los datos de las divisiones que nos han dado exactas, los tenemos todos.

24 : 1 = 24 exacto → 1 y 24 son divisores.

24 : 2 = 12 exacto → 2 y 12 son divisores.

24 : 3 = 8 exacto → 3 y 8 son divisores.

24 : 4 = 6 exacto → 4 y 6 son divisores.

24 : 5 no es exacto → 5 no es divisor

Como el 6 ya lo tenemos, hemos acabado de buscar.

Si sabemos la descomposición de un número, serán divisores suyos todos los números que podamos "fabricar" multiplicando **entre si** esos factores.

Como 24 = $2^3 \cdot 3$, son divisores suyos 1, 2, 2^2=4, 2^3 = 8, $2 \cdot 3$ = 6, $2^2 \cdot 3$ = 12 y $2^3 \cdot 3$ = 24

1.2.1 Ejercicio resuelto.

Calcula todos los divisores de 345.

345 : 1 = 345 → 1 y 345
Como es impar no probamos con el 2.
345 : 3 = 115 exacto → 3 y 115
Como es impar tampoco probamos con el 4, ni con el 6, … ni con ninguno par
345 : 5 = 69 exacto → 5 y 69
345 : 7 no da exacto, entre 9 tampoco, 11 tampoco, … por fin con el 15:
345 : 15 = 23 exacto → 15 y 23.
Con ningún otro número entre 15 y 23 resulta, así que hemos terminado.
Así que Div(345) = {1, 3, 5, 7, 15, 23, 69, 115, 345}

Esta forma de hacerlo es más lento pero más seguro. Calculando a partir de la descomposición habríamos terminado antes, pero hay que tener mucho cuidado de no olvidarse ninguna combinación.

1.2.2 Practícalo tú.

Calcula los divisores de 12, 34 y 36.

1.3 Máximo común divisor

Dado un número, *por ejemplo 24*, si al dividirlo por otro, *por ejemplo 4*, da exacto, decimos que es su divisor. *4 es divisor de 24.*

Y si no da exacto, *por ejemplo 5*, decimos que no es divisor. *5 no es divisor de 24.*

Si sabemos la descomposición de un número, serán divisores suyos todos los números que podamos "fabricar" multiplicando **entre si** esos factores.

Así que si queremos buscar una cantidad que sea divisor a la vez de varios números (máximo**.común.divisor**), *por ejemplo de 30 y 42,* tendremos que usar aquellos factores de la descomposición que sean comunes a todos. *Como $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ y $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ sus divisores comunes serán 2, 3 y $2 \cdot 3 = 6$.*

Y si queremos que ese divisor sea el mayor posible (**máximo**.común.divisor) usaremos la mayor cantidad posible de ellos. *En el ejemplo era $6 = 2 \cdot 3$ (usando todos los posibles)*

1.3.1 Ejercicio resuelto.

Calcula el m.c.d. 1200 y 345.

Como ya sabemos que $1200 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $345 = 3 \cdot 5 \cdot 23$

Vemos que los factores primos que están en las dos descomposiciones son el 3 y el 5. Como en 345 el 3 sólo está una vez, en el mcd sólo estará una vez también. 3^2 no divide a 345.

Así que m.c.d.(1200, 345) = $3 \cdot 5 = 15$.

1.3.2 Practícalo tú.

Calcula el m.c.d. de

a) 12 y 34 b) 1800 y 36 c) 12 y 1800 d)34 y 36

1.4 Mínimo común divisor

Dado un número, *por ejemplo 24*, son múltiplos suyos si se puden obtener multiplicando ese número por otro cualquiera. *Por ejemplo $24 = 24 \cdot 1$, $8 = 24 \cdot 2$, $420 = 24 \cdot 5$, $16536 = 24 \cdot 689$, ...*

Fíjate que si A es múltiplo de B, entonces B es divisor de A

Como 420 es múltiplo de 24, 24 es divisor de 420.

Si sabemos la descomposición de un número, serán múltiplos suyos todos los números que podamos "fabricar" multiplicando **TODOS** esos factores por otros números.

Así que si queremos buscar una cantidad que sea múltiplo a la vez de varios números (mínimo.común.**múltiplo**), *por ejemplo de 30 y 42,* tendremos que usar todos los factores de las dos descomposiciones.

Como $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ y $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ los múltiplos de 30 son de la forma $A = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot$ algo y los múltiplos de 42 son $B = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot$ otro algo.

Y si queremos que ese múltiplo común y el menor posible (**máximo**.**común**.divisor) usaremos todos los factores que haya pero la menor cantidad posible de ellos.

En el ejemplo será $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 30 \cdot 7 = 42 \cdot 5$ No repetimos el 2 ni el 3 porque con una vez vale.

1.4.1 Ejercicio resuelto.

Calcula el m.c.m. 345 y 1200.

Como ya sabemos que $345 = 3 \cdot 5 \cdot 23$ y $1200 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

Tenemos que poner el 345 entero y el 1200 entero, pero sin repetir. Poniendo el 345 vemos que falta 2^4 y otro 3: lo añadimos y listo.

Así que m.c.m.(345, 1200) = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 23 = 16560$

1.4.2 Practícalo tú.

Calcula el m.c.m. de

b) 12 y 34

c) 1800 y 36

d) 12 y 1800

e) 34 y 36